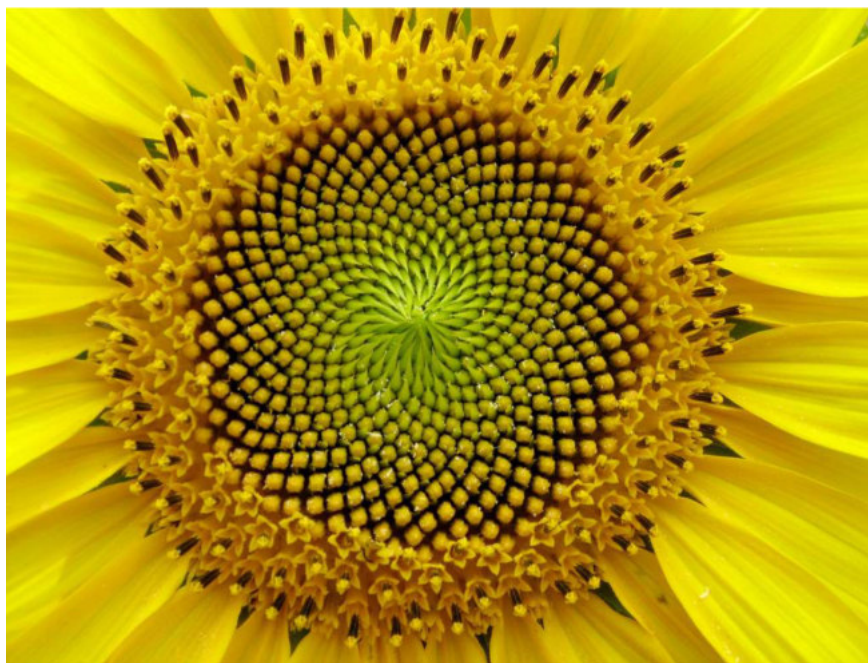




Zahlenland Jahrestagung 2018
Zahlenland Outdoor
Die Fibonacci-Zahlen – Ruhm und Realität
Beitrag von Nicole Schweitzer



1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144



8 Blütenblätter: Rittersporn

13 Blütenblätter: Ringelblume

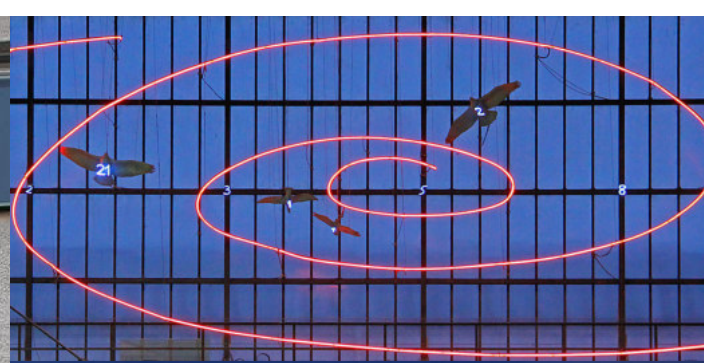
21 Blütenblätter: Aster

Margeriten- und Gänseblümchen: 21,34,55,89

144 Blütenblätter: große Sonnenblumenarten

,doppelte Fibonacci-Zahlen' als Zuchtergebnis







Fibonacci

Leonardo da Pisa, auch **Fibonacci** genannt (* um 1170; † nach 1240), war Rechenmeister in Pisa und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Auf seinen Reisen nach Afrika, Byzanz und Syrien machte er sich mit der arabischen Mathematik vertraut und verfasste mit den dabei gewonnenen Erkenntnissen zum indo-arabischen Ziffern- und Stellenwertsystem das Rechenbuch *Liber ab(b)aci* im Jahre 1202.

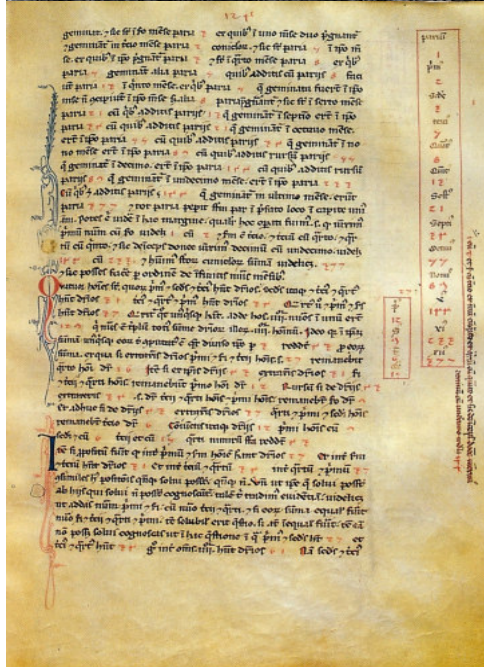
Bekannt ist daraus vor allem die nach ihm benannte Fibonacci-Folge:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
 $1+1=2$ $1+2=3$ $2+3=5$ $3+5=8$ $5+8=13$

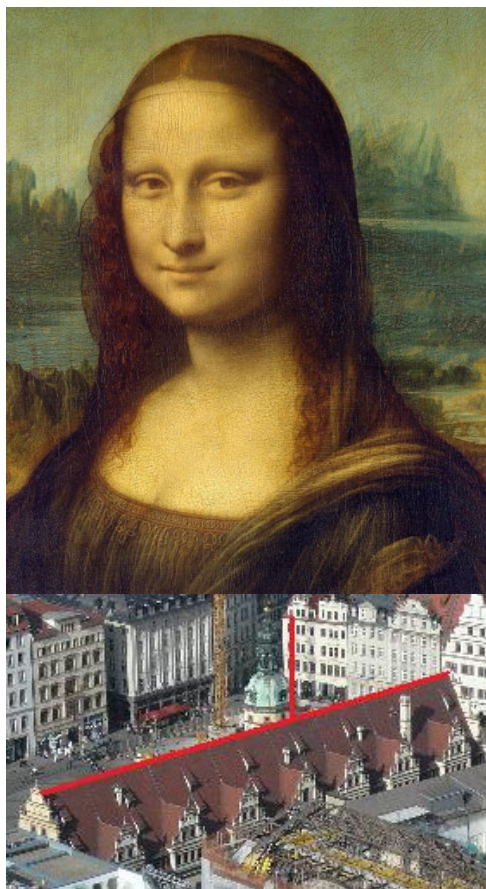
Die Fibonacci-Folge steht in einem unmittelbaren Zusammenhang zum Goldenen Schnitt und ist daher in der Natur zu finden.

Je weiter man in der Folge fortschreitet, desto mehr nähert sich der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen dem **Goldenen Schnitt** an.

Die Fibonacci-Folge hat weitere interessante Effekte, mit denen man rätseln, malen und zaubern kann.

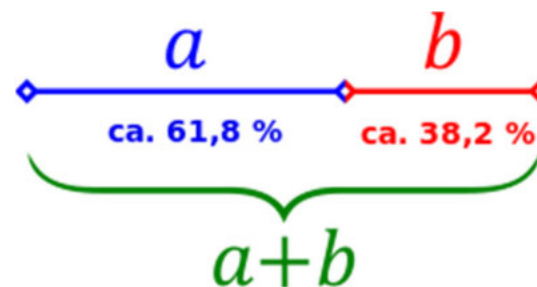


Liber abbaci „Kaninchenaufgabe“



Goldener Schnitt

Als **Goldener Schnitt** wird das Teilungsverhältnis einer Strecke bezeichnet, bei dem das Verhältnis des Ganzen zu seinem größeren Teil (auch Major genannt) dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil (dem Minor) entspricht.

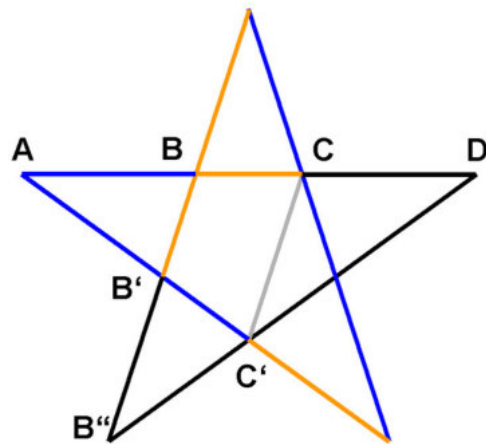


Proportionen beim Goldenen Schnitt:

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Das mathematische Symbol für diese Zahl ist der griechische Buchstabe Phi:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$$



Der Goldene Schnitt ist schön



In der westlichen Welt wird eine Aufteilung von 61,8 % zu 38,2 % als schön empfunden – oder andersherum:
Viele klassische Gebäude und Kunstwerke sind nach dem goldenen Schnitt gestaltet und deshalb finden wir das schön.

Die Fibonacci Zahlen in der Natur

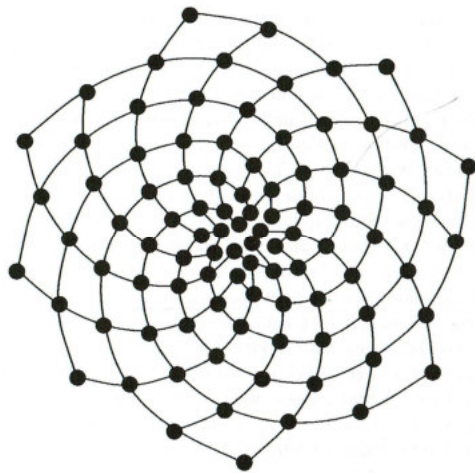
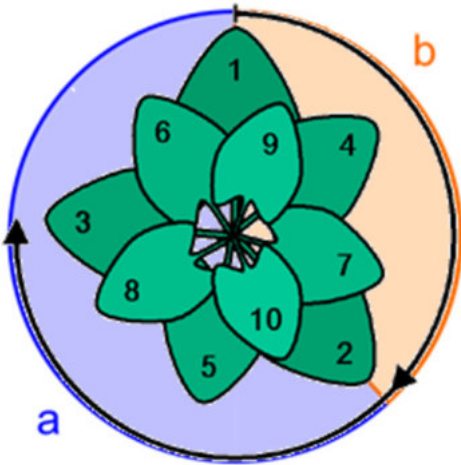
Viele Pflanzen weisen in der Phyllotaxis, also der Anordnung ihrer Blätter, Samen oder Schuppen Spiralen auf, deren Anzahlen durch Fibonacci-Zahlen gegeben sind.

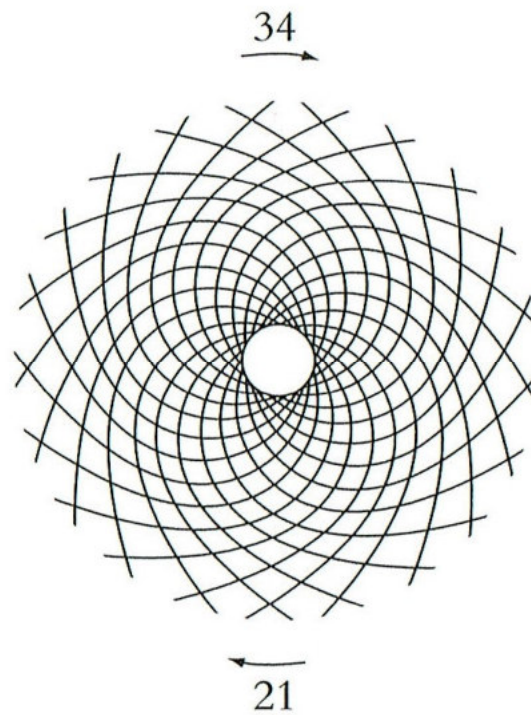
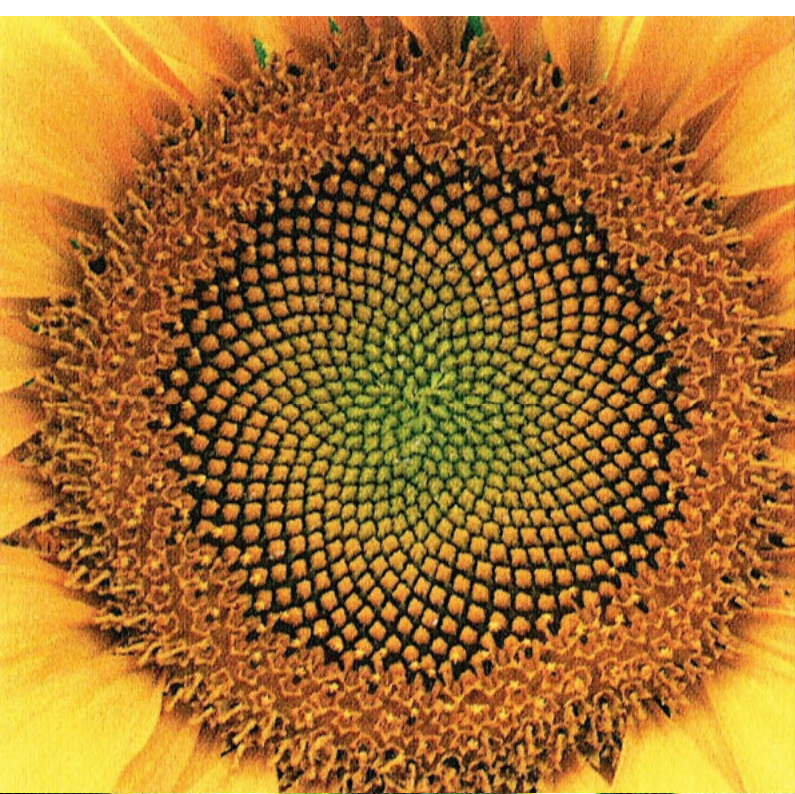
Von oben betrachtet erfolgt die Anordnung von Blättern im Abstand des Goldenen Winkels. Das Sonnenlicht wird optimal genutzt, da sich die Blätter nie ganz überdecken.

Auch bei der Entstehung von Blütenständen und Zapfen liegen die älteren Pflanzenteile weiter außen und bilden in der Reihenfolge ihrer Entstehung eine eng gewundene Spirale mit sehr platz sparender Packung.

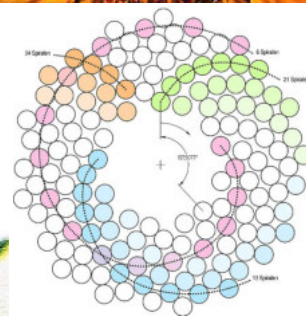
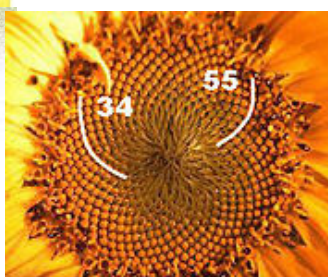
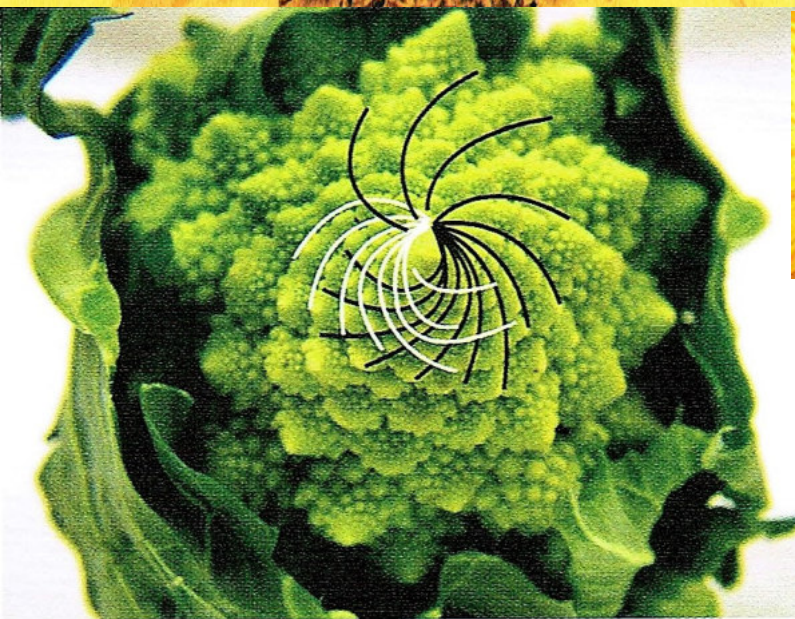
In räumlich enger Nachbarschaft liegen jedoch Pflanzenteile, die im Abstand einer Fibonacci Zahl entstanden sind (Parastichen). Daraus bilden sich die Fibonacci-Spiralen:

9.2 Aufeinanderfolgende Punkte, die entlang einer eng gewundenen Spirale (nicht dargestellt) im Winkel von jeweils $137,5^\circ$ zueinander angeordnet sind, fallen natürlicherweise in zwei Familien locker gewundener Spiralen; diese sind für das menschliche Auge unmittelbar erkennbar. In dieser Zeichnung drehen sich 8 Spiralen in die eine Richtung und 13 in die andere; 8 und 13 sind zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

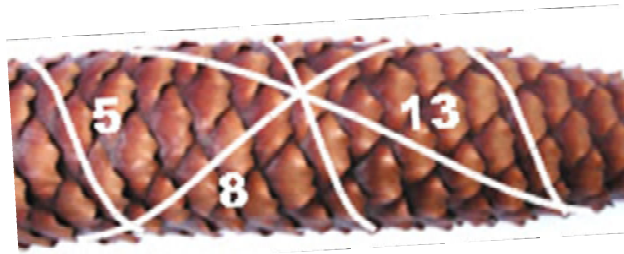
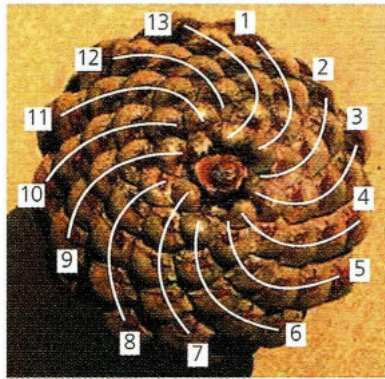
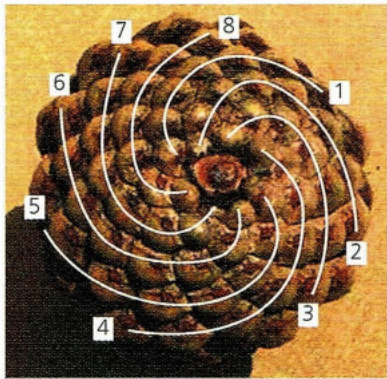




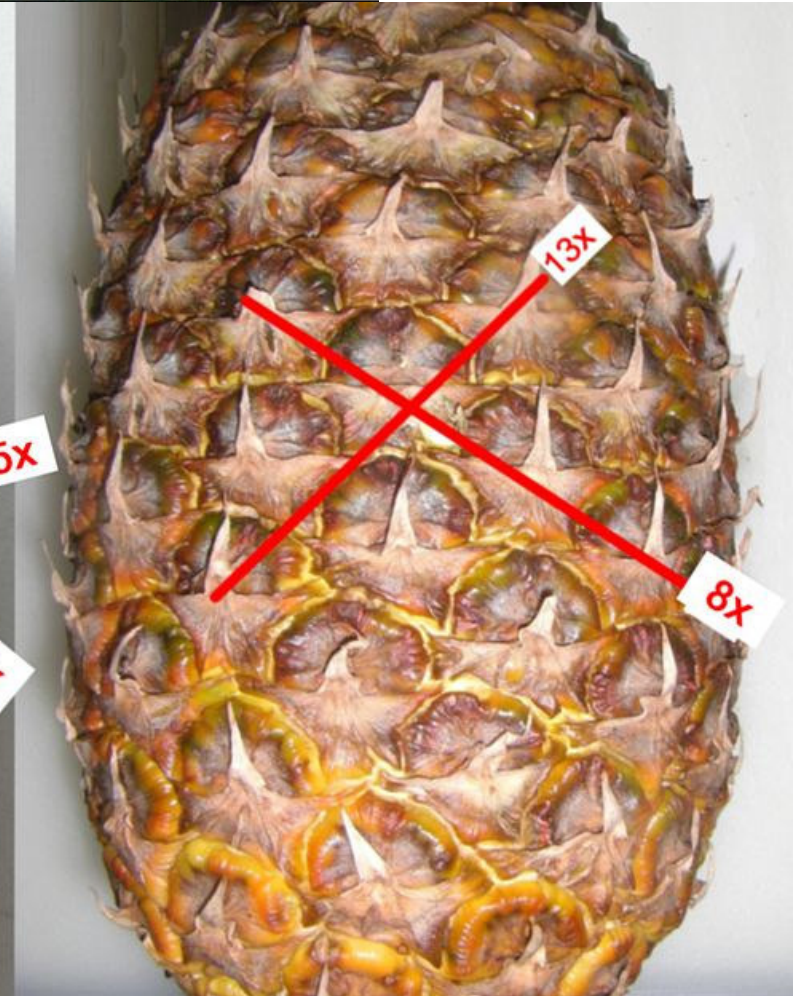
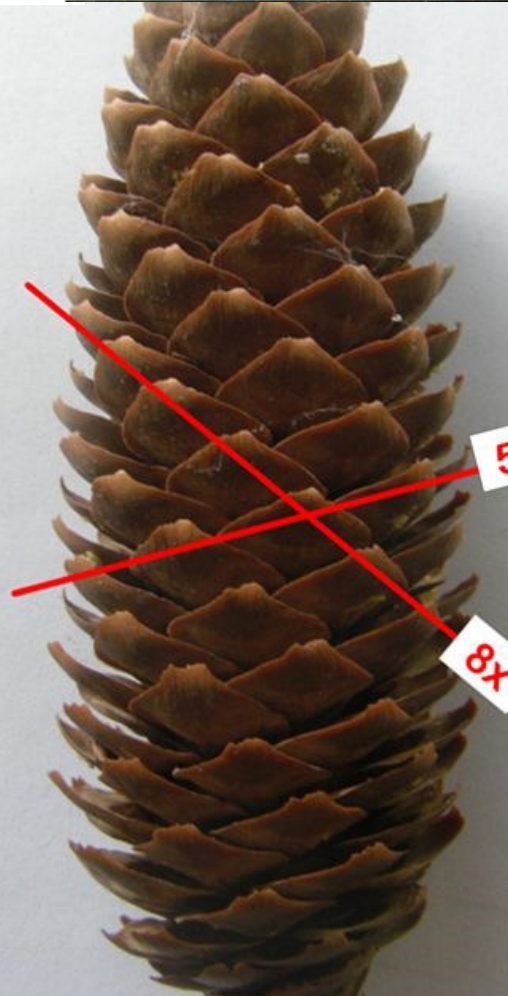
Die Anzahl der Blütenblätter bei einer Margarine oder einem Gänseblümchen entspricht immer einer Fibonacci-Zahl, in diesem Fall 21.



Die Spiralen, die sich bei diesem Romanesco nach rechts und links bilden, entsprechen der Fibonacci-Folge.



Die Anzahl der in beide Richtungen verlaufenden Spiralen (8, 13) dieser Zapfen entspricht aufeinanderfolgenden Zahlen der Fibonacci-Folge.





Die Fibonacci-Zahlen – Ruhm und Realität

Je weiter man in der Fibonacci Folge fortschreitet, desto mehr nähert sich der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen dem Goldenen Schnitt an.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

Dies gilt für alle Folgen mit der gleichen Bildungsregel

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Jedes Folgenglied ist gleich der Summe der beiden vorhergehenden. Wobei die ersten beiden Zahlen festgelegt sind. Beispiele:

Fibonacci-Zahlen

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144

Lucas-Zahlen (Édouard Lucas, *1842 †1891, französischer Mathematiker)

2 1 3 4 7 11 18 29 47 76 123

Die ultimativen Zahlenland-Jahrestagung-2018-Zahlen

4.5.2018 bis 6.5.2018 ...

Die Fibonacci-Zahlen – Ruhm und Realität

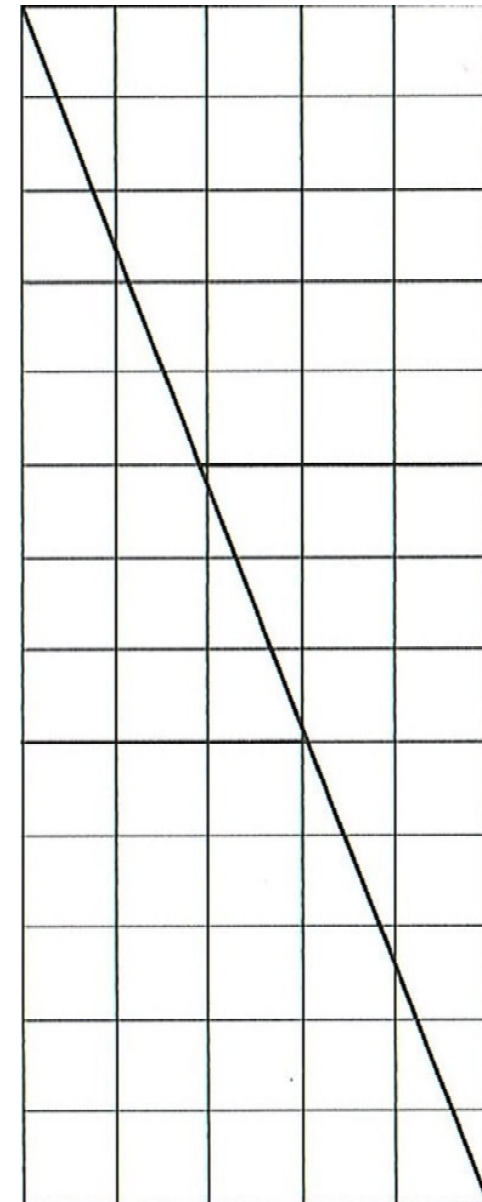
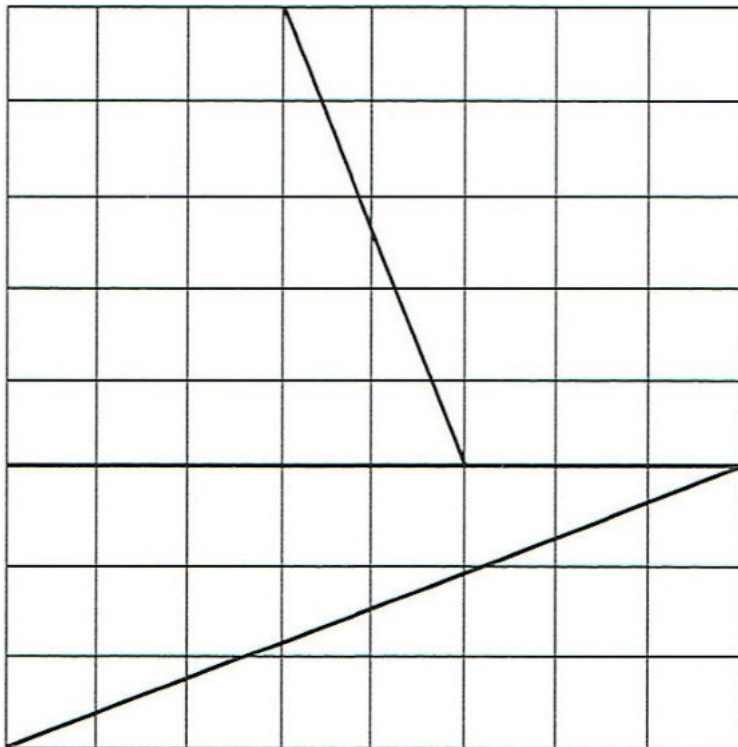
	Fibonacci		Lucas
Stelle	Zahl	Quotient	Zahl
1	1		2
2	1	1	1
3	2	2	3
4	3	1,5	4
5	5	1,666666667	7
6	8	1,6	11
7	13		18
8	21		29
9	34		47
10	55		76
11			123
12			199
13			322
14			521
15			843
16			1364
17			2207
18			3571
19			5778
20			9349

$\varphi = 1,618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448...$

Rätseln mit Fibonacci Zahlen 5, 8, 13

Zerschneide ein Quadrat aus 8×8 Kästchen und lege die Puzzleteile zu einem 5×13 Rechteck.

Das Rechteck hat 65 Kästchen, also ein Kästchen mehr Fläche als das Quadrat.



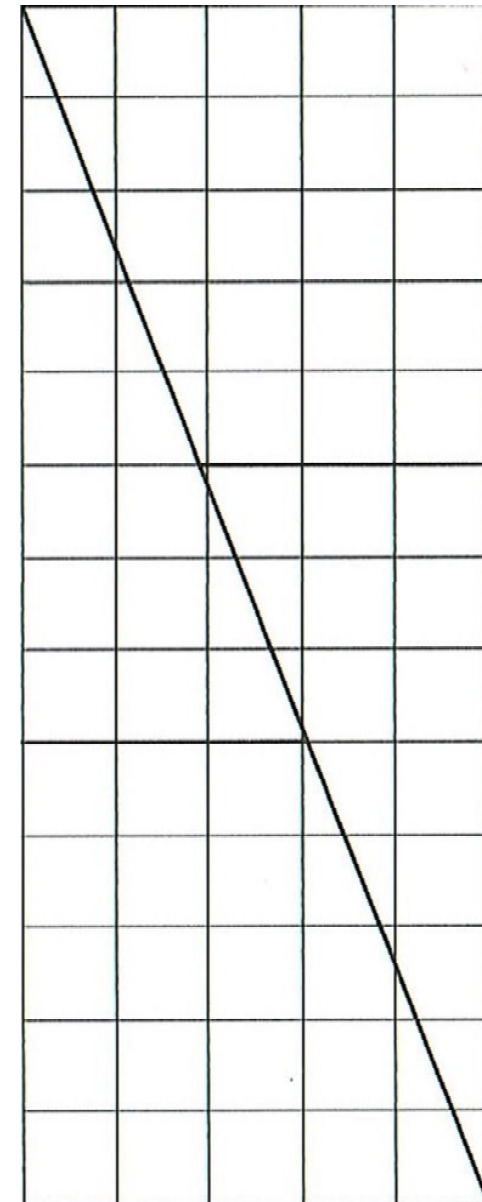
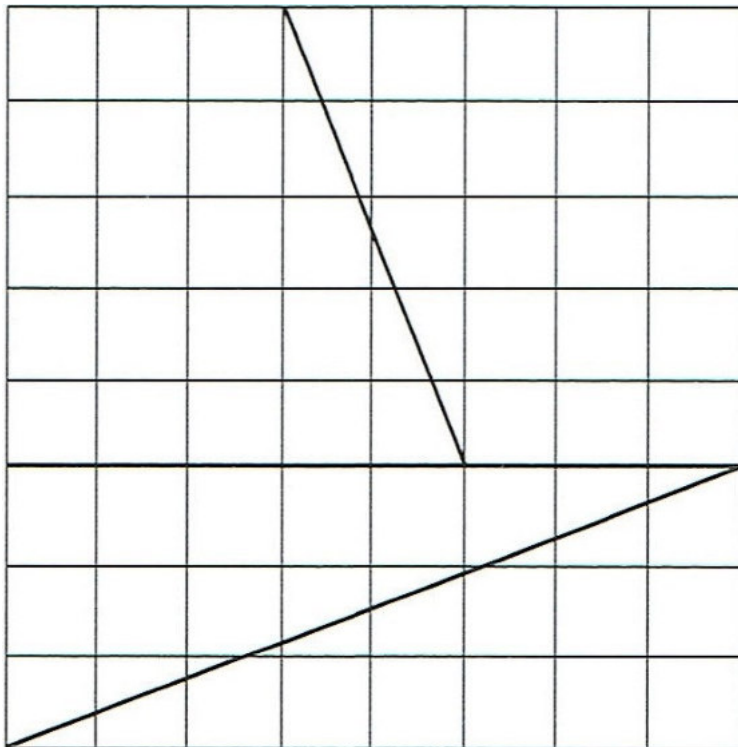
Rätseln mit Fibonacci Zahlen

Bei drei aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen unterscheiden sich das Quadrat der mittleren Zahl und das Produkt der äußeren Zahlen um 1:
z.B.

$$3, 5, 8: \quad 5^2 = 25 \text{ und } 3 \cdot 8 = 24$$

$$5, 8, 13: \quad 8^2 = 64 \text{ und } 5 \cdot 13 = 65$$

Das Kästchen entsteht aufgrund der Zeichen- und Schneide-Ungenauigkeit.
Die ‚Fläche‘ verteilt sich auf der langen Diagonalen im Rechteck



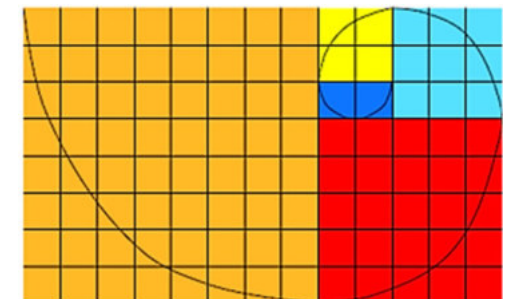
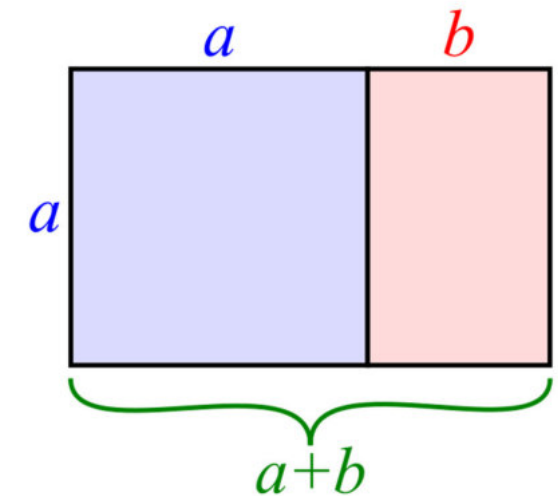
Malen nach (Fibonacci) Zahlen

Ein Goldenes Rechteck ist ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis der beiden Seiten a und b dem Goldenen Schnitt entspricht.

Dabei gilt für die Seitenverhältnisse: $a : b = (a + b) : a$

Eine markante Eigenschaft dieser geometrischen Figur ist, dass wenn man einen quadratischen Abschnitt entfernt, wiederum ein goldenes Rechteck entsteht (Bsp. Kreditkarten).

Quadrate der Fibonacci-Folge ergeben goldene Rechtecke und daraus kann man eine logarithmische Spirale zeichnen (Bsp. Nautilus).



Zaubern mit Fibonacci Zahlen



123 Trick

Für diesen Trick benötigt ihr nur ein Blatt Papier und Bleistifte.

1. Markiert zehn Zeilen und bittet einen Freund, eine Zahl in die erste Zeile zu schreiben.
2. Bittet einen anderen Freund, eine andere Zahl in die zweite Zeile zu schreiben.
3. Laßt einen Freund jetzt die Zahlen addieren und in die dritte Zeile schreiben.
4. Bittet sie, abwechselnd immer die Zahlen in den letzten beiden Zeilen zu addieren und die Summe in die nächste Zeile zu schreiben.
5. Schaut kurz auf das Papier, wenn eure Freunde bei der siebten Reihe angekommen sind. Multipliziert diese Zahl mit 11, schreibt sie auf, und legt das Blatt verdeckt auf den Tisch.
6. Bittet eure Freunde, alle Zahlen zu addieren, wenn sie mit den 10 Zahlen fertig sind.
7. Deckt eure Lösung auf, um ihnen zu zeigen, daß ihr die Antwort bereits wußtet.

Dieser Trick funktioniert deshalb, weil bei den Fibonacci-Zahlen die siebte Zahl genau ein Elftel der Gesamtsumme der ersten zehn Zahlen ist.

Zahlensummen der Fibonacci-Folge

Addiert man zehn beliebige aufeinanderfolgende Zahlen der Fibonacci-Folge, so wird immer ein Vielfaches von 11 herauskommen. Nehmen wir beispielsweise die ersten zehn Fibonacci-Zahlen, so ergibt sich:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 = 11 \cdot 13$$

Dasselbe gilt für

$$21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1.597 = 4.147 = 11 \cdot 377$$

Das ist jedoch noch nicht alles, sondern jede Summe entspricht genau 11-mal der siebten Zahl in der addierten Folge – 13 beim ersten Beispiel und 377 beim zweiten.

Und hier haben wir noch eine Überraschung: Die Summe der ersten n Glieder der Folge entspricht dem Glied $n+1$ minus 1. Wir sehen dies im Fall der ersten zehn Glieder, die 143 ergeben. Dies entspricht dem 12. Glied (144) minus 1. Im Falle der ersten 17 Glieder beträgt die Gesamtsumme 4180, was Glied a_{19} (4181) minus 1 gleichkommt.

Als Formel ausgedrückt sieht das so aus:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

Wir können dieses Phänomen verwenden, um die Summe einer beliebigen Anzahl aufeinanderfolgender Glieder zu berechnen, was für Nichteingeweihte wie ein Zaubertrick erscheint. Als Beispiel wollen wir zwei beliebige Zahlen verwenden – vielleicht 25 und 40 – und sie anstelle von n in die Formel einsetzen:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + a_{40} = a_{42} - 1$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + a_{25} = a_{27} - 1$$

Um die Summe der Glieder zwischen a_{25} und a_{47} zu erhalten, müssen wir lediglich die Differenz zwischen den beiden Ausdrücken berechnen:

$$a_{26} + \dots + a_{40} = a_{42} - a_{27}$$

Das ist der Trick: Um alle aufeinanderfolgenden Glieder zwischen zwei beliebigen Gliedern zu addieren, genügt es, einfach ihre $(n + 2)$ -ten Elemente zu subtrahieren.

Mathe Videos von Numberphile (in engl.)
[Sum of Fibonacci Numbers Trick](#)

Zaubern mit Fibonacci Zahlen

Martin Gardner

MATHEMATIK UND MAGIE

115 Karten-, Würfel- und Dominotricks,
mathematische Spiele und Zauberkunststücke

Vorwort von Alexander Adrian



Addition einer Fibonacci-Reihe

Ein weniger bekanntes Schnellrechnenkunststück beschäftigt sich damit, fast augenblicklich zehn Zahlen einer beliebigen Fibonacci-Reihe zu addieren (bei Fibonacci-Reihen ist jedes Glied die Summe der beiden vorherigen Glieder). Der Trick kann beispielsweise so vorgeführt werden: Der Zauberer bittet jemanden, zwei beliebige Zahlen aufzuschreiben. Zur Verdeutlichung wollen wir annehmen, der Zuschauer hätte 8 und 5 gewählt. Er schreibt beide Zahlen untereinander und wird dann gebeten, diese zu addieren, um eine dritte Zahl zu bekommen. Diese dritte wird zu der darüberstehenden, der zweiten, addiert. So erhält man eine vierte Zahl. Damit fährt man fort, bis zehn Zahlen in einer Reihe untereinander stehen:

8
5
13
18
31
49
80
129
209
338

Während diese Zahlen aufgeschrieben werden, steht der Zauberer abgewendet da. Sind alle notiert, dreht er sich um, zieht einen Strich unter die Spalte und schreibt sofort die Summe aller Zahlen darunter. Um die Summe zu erhalten, nimmt er einfach die vierte Zahl von unten und multipliziert diese im Kopf mit 11. In diesem Fall steht dort 80, die Antwort ist also 80 mal 11 gleich 880.

Der Trick wurde von Royal V. Heath in »The Jinx«, 1940, Nr. 91, veröffentlicht (vgl. auch die November-Ausgabe des Jahres 1947 von »American Mathematical Monthly«, in der A.L. Epstein das Kunststück als Teil eines allgemeineren Problems diskutiert).

Vorhersagekunststücke und Gedankenlesetricks mit Zahlen sind gewöhnlich austauschbar – d.h. ein Trick, der als Vorhersage dargeboten werden kann, kann ebenso als Gedankenlese-Effekt vorgeführt werden und umgekehrt. Weiß z.B. der Zauberer im voraus das Ergebnis einer Rechnung, von der der Zuschauer meint, der Vorführende könne es nicht kennen, so kann er dieses Wissen dadurch dramatisieren, daß er das Ergebnis im voraus auf ein Stück Papier schreibt. Damit hat er einen Vorhersagetrick. Er könnte aber auch vorgeben, des Zuschauers Gedanken zu lesen, nachdem dieser das Ergebnis errechnet hat. In diesem Fall ist es ein Gedankenlese-kunststück. (Übrigens hat er drittens auch noch die Möglichkeit, den Eindruck zu erwecken, als erhalte er das Ergebnis durch eine Blitzrechnung.) Die meisten der folgenden Tricks eignen sich dementsprechend für beide Darbietungsformen, auch diejenigen, bei denen nicht noch einmal besonders darauf hingewiesen wird.

Fibonacci Nim



Fibonacci and Lucas Numbers

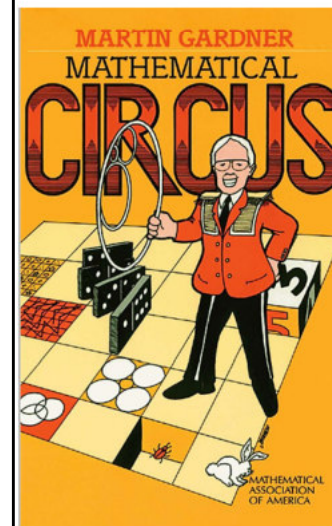
187

ANSWERS

THE FIRST PROBLEM is to find the winning move in Fibonacci nim when the game begins with a pile of 20 counters. Since 20 is not a Fibonacci number, the first player has a sure win. To determine his first move he expresses 20 as the sum of Fibonacci numbers, starting with the largest possible F -number, 13, adding the next largest possible, 5, then the next, 2. Thus $20 = 13 + 5 + 2$. Every positive integer can be expressed as a unique sum in this way. No two consecutive F -numbers will appear in the expression. An F -number is expressed by one number only: itself.

The last number, 2, is the number of counters the first player must take to win. The second player is forbidden by the rules of Fibonacci nim to take more than twice 2, and therefore he cannot reduce the pile (which now has 18 counters) to the Fibonacci number 13. Assume that he takes four counters. The pile now contains 14. This is equal to F -numbers $13 + 1$, and so the first player takes one counter. By continuing this strategy he is sure to obtain the last counter and win.

If the initial number of counters is a Fibonacci number, say 144, the second player can always win. True, the first player can take 55 counters to leave 89, the next highest F -number, but then the second player can immediately win by taking all 89 counters because 89 is less than twice 55. The first player is forced, therefore, to leave a non-Fibonacci number of counters and the second player wins by the strategy that I have just explained. (See Donald E. Knuth, *Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, 1968, page 493, exercise No. 37, and "Fibonacci Nim," by Michael J. Whinihan in *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 1, No. 4, December 1963, pages 9–13.)



Kaninchenaufgabe von Fibonacci

Das bekannteste Kapitel des Buches ist jedoch die berühmte Kaninchen-Aufgabe, deren Lösung heute als Fibonacci-Folge bekannt ist.

Sie lautet folgendermaßen: „Wie viele Kaninchenpaare können innerhalb eines Jahres aus einem einzigen Paar entstehen, wenn jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat jeden Monat ein weiteres Paar hervorbringt?“

Zur Lösung fertigte Fibonacci als erfahrener Kaufmann, der er war, eine Tabelle an. Darin gliederte er das Wachstum seiner Kaninchenpopulation auf und trug die Anzahl der am Monatsende vorhandenen Paare in eine Spalte mit der Gesamtzahl ein. Ein kurzer Blick auf diese „Gesamtzahlkolumne“ zeigt ein erstaunliches Muster in der Zahlenfolge: Jede Zahl entspricht der Summe der beiden vorhergehenden.

Generation Monat	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Gesamtzahl der Paare
Januar	1						1
Februar	1						1
März	1	1					2
April	1	2					3
Mai	1	3	1				5
Juni	1	4	3				8
Juli	1	5	6	1			13
August	1	6	10	4			21
September	1	7	15	10	1		34
Oktober	1	8	21	20	5		55
November	1	9	28	35	15	1	89
Dezember	1	10	36	56	35	6	144

Die Originalaufgabe ist schwierig
- gemeint ist Anzahl der Paare
- ‚Vermehrung‘ im 2. Monat
- irgendwie unrealistisch...

Januar

Februar

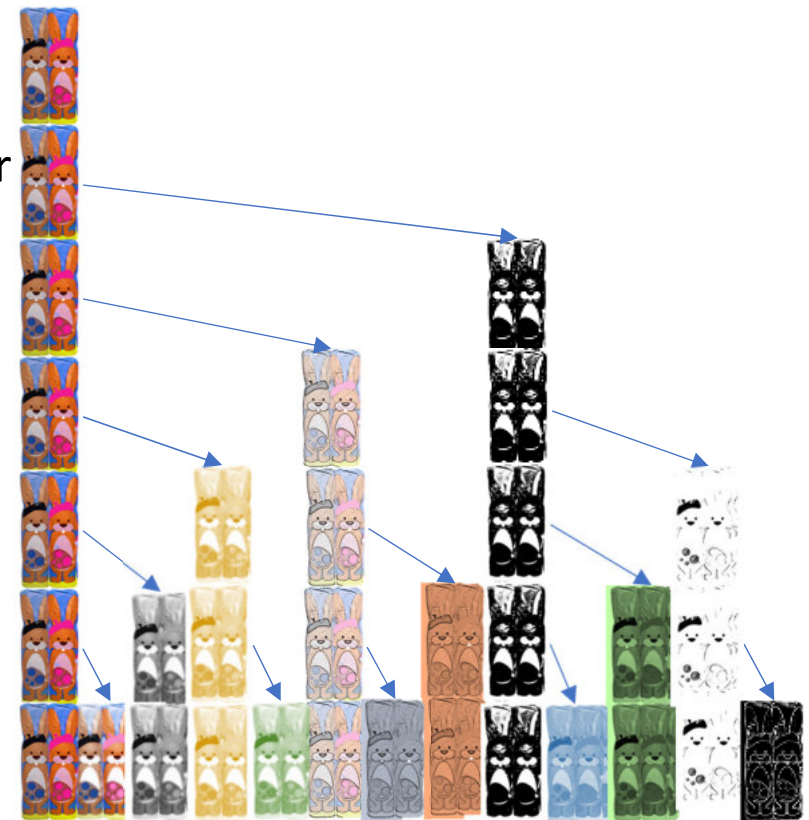
März

April

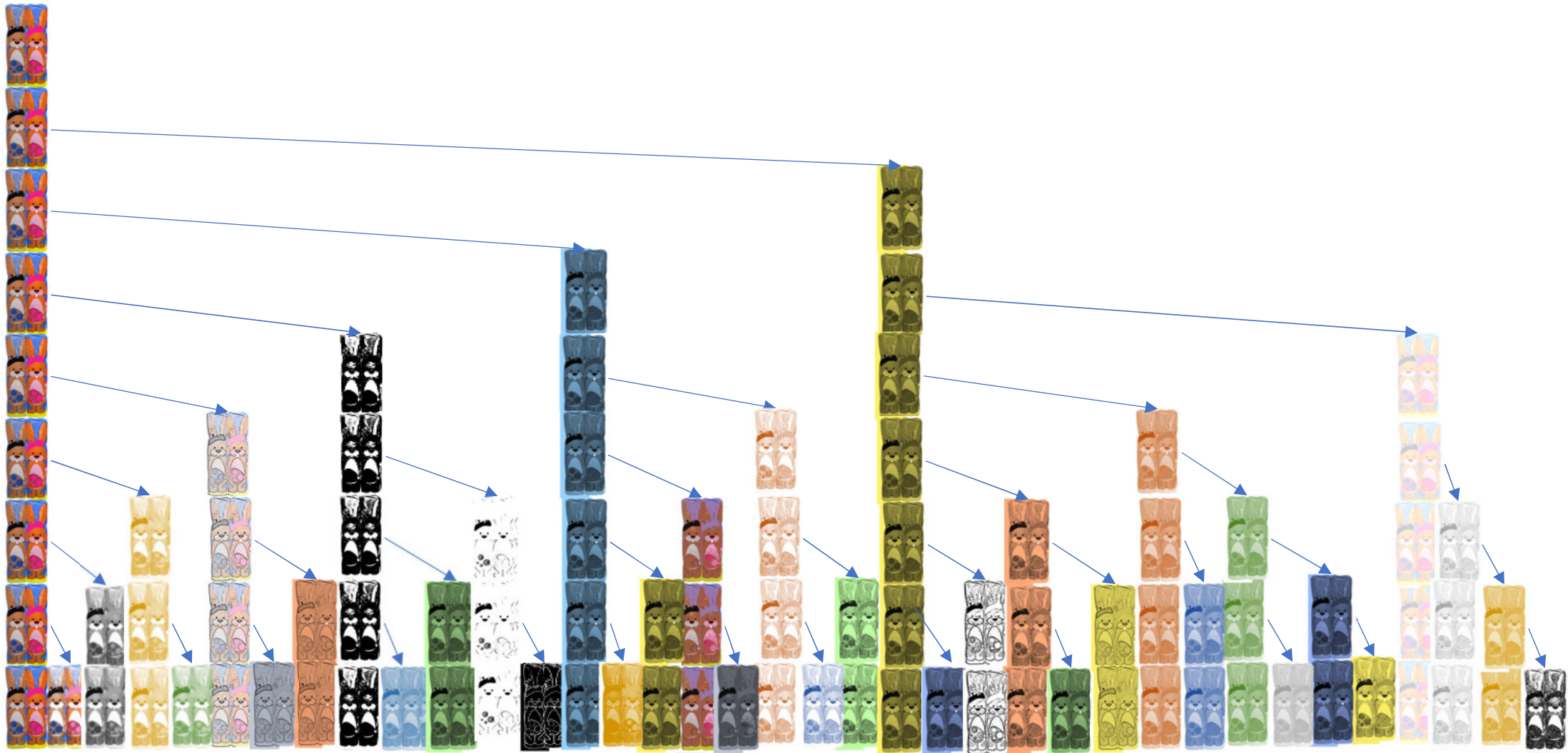
Mai

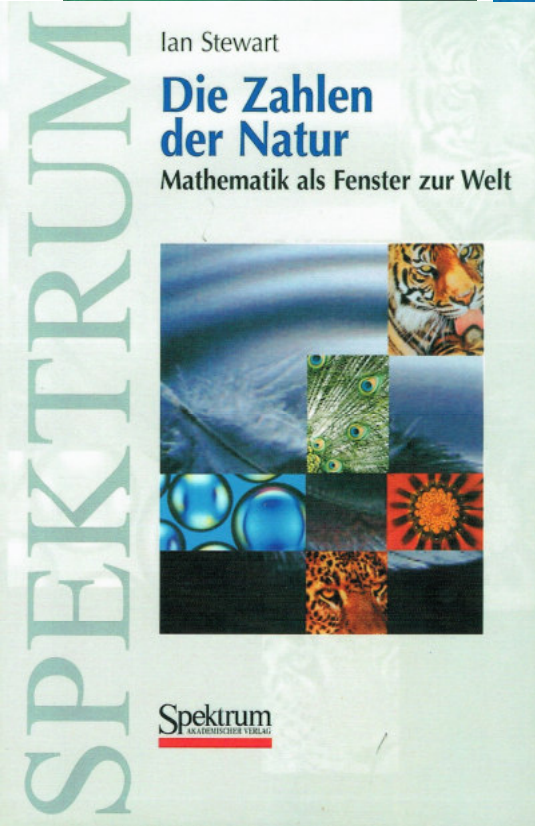
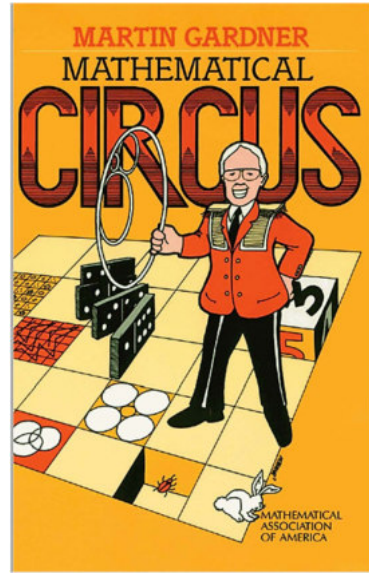
Juni

Juli

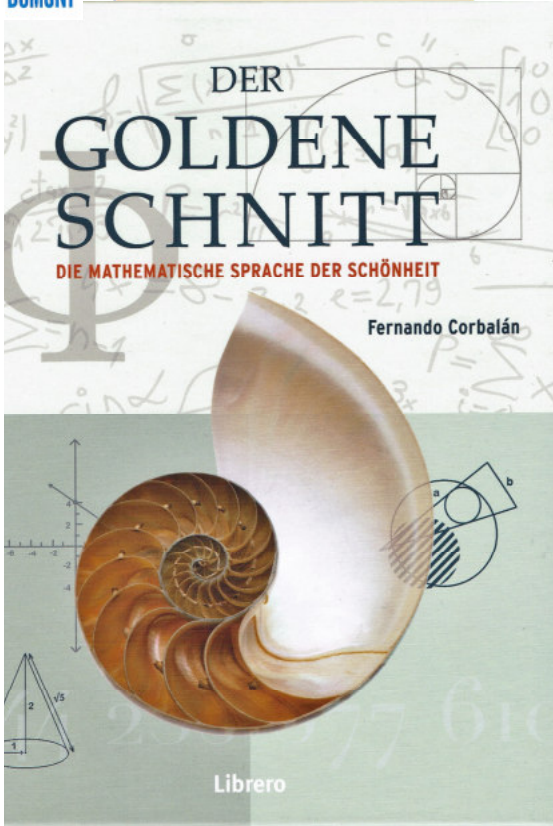


Paare bis September





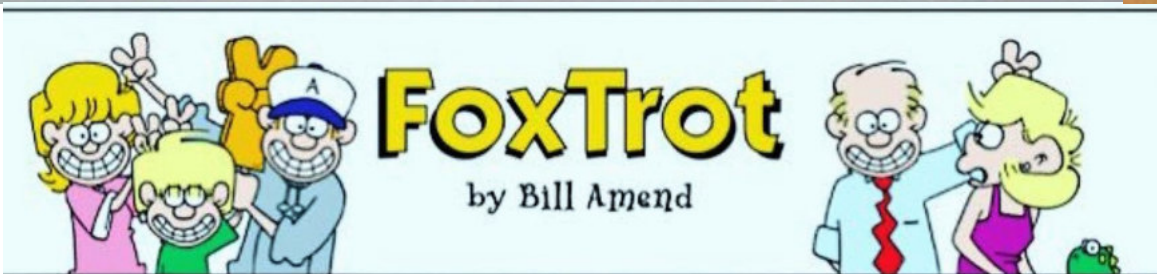
Pflanzen besitzen geheime Regelmäßigkeiten. Wenn man weiß, wonach man sucht, entdeckt man sie häufig auch dort, wo man sie gar nicht vermutet. Am besten man achtet auf Spiralmuster und bestimmte Zahlen, die mit den Spiralen in engem Zusammenhang stehen, die Fibonacci-Zahlen. Man findet sie bei zahlreichen Pflanzen, bei Blüten 13, 14, 15 ebenso wie bei Tannenzapfen 16. Da biologisches Wachstum sehr flexibel ist, gibt es zu diesen Mustern auch Ausnahmen, doch Fibonacci-Zahlenspiele und Spiralgeometrie sind erstaunlich weit verbreitet. Sie deuten darauf hin, dass das Pflanzenwachstum einfachen, aber subtilen mathematischen Regeln gehorcht, die irgendwo im Grenzbereich zwischen Dynamik, Geometrie und Arithmetik liegen.





Unforeseen Consequences

I wrote a poem on a page but then each line grew to the word sum of the previous two until I started to worry about all these words coming with such frequency because, as you can see, it can be easy to run out of space when a poem gets all Fibonacci sequence.



Eldest told a joke: "What does a mathematician have on her dress?"

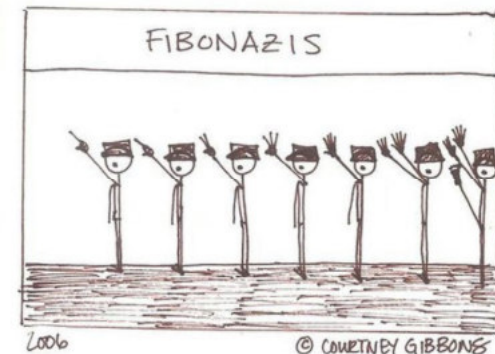
Fibonacci sequins."

Original (Englisch) übersetzt von Microsoft

Ältester erzählte einen Witz: "Was hat ein Mathematiker auf Ihrem Kleid?"

Fibonacci-Pailletten.

03.08.17, 22:53



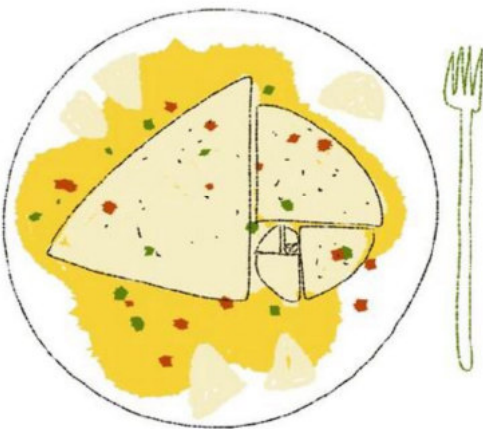
Dieser Fibonacci Witz ist so schlecht wie die beiden vorherigen zusammen.



2016

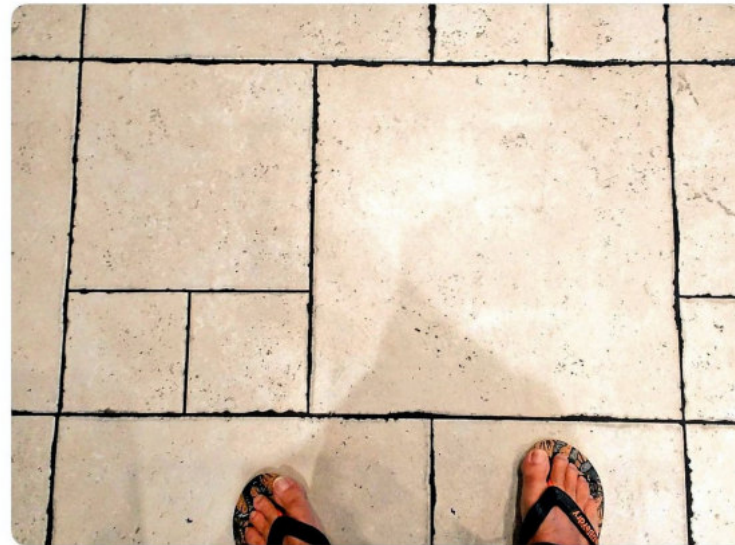
fb/ComedyAndHumor

Fibonachos



Vincent Pantaloni
@panlepan

COOL a #Fibonacci tiling at this restaurant! 🤩



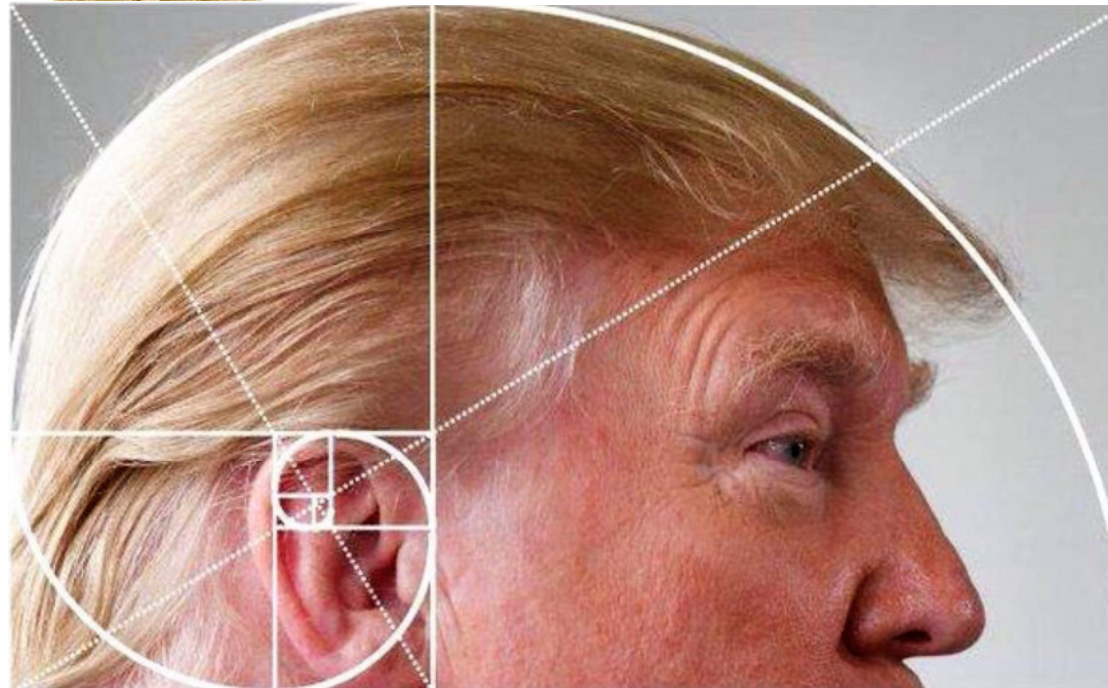
20.07.17, 21:21



El Bruno
@elbruno

#Humor – You aren't a real #developer if you're not always perfectly #Fibonacci elbruno.com/2017/02/12/hum...

Original (Englisch) übersetzen



Taylor Harwin
@Taylorharwin

Antwort an @chrisbella
@chrisbella @xc This is an old joke, but I've heard that next year's Fibonacci conference is going to be as big as the last two put together

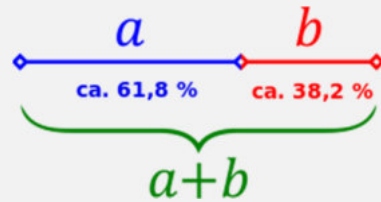
Original (Englisch) übersetzen

05.11.12, 23:12

**This Fibonacci joke
is as bad as the last
two you heard
combined.**

Backup

Goldener Schnitt



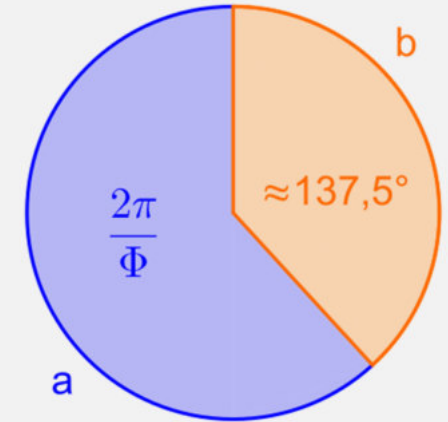
$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots$$

Charakteristische Gleichung

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

Goldener Winkel



$$2\pi - \frac{2\pi}{\Phi} \approx 137,5^\circ$$

Der Goldene Winkel ($\approx 137,5^\circ$) ist der Kreiswinkel des kleineren Kreisbogens **b**, wenn er mit dem größeren Kreisbogen **a** einen Kreis vom Umfang **a + b** bildet und das Verhältnis **a : b** dem Goldenen Schnitt entspricht.

Die ersten 1000 Nachkommastellen des goldenen Schnitts:

1- 100: 6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374
 101- 200: 8475408807538689175212663386222353693179318006076672635443338908659593958290563832266131992829026788
 201- 300: 0675208766892501711696207032221043216269548626296313614438149758701220340805887954454749246185695364
 301- 400: 8644492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780915884607499887124007652170575179788
 401- 500: 3416625624940758906970400028121042762177111777805315317141011704666599146697987317613560067087480710
 501- 600: 1317952368942752194843530567830022878569978297783478458782289110976250030269615617002504643382437764
 601- 700: 8610283831268330372429267526311653392473167111211588186385133162038400522216579128667529465490681131
 701- 800: 7159934323597349498509040947621322298101726107059611645629909816290555208524790352406020172799747175
 801- 900: 3427775927786256194320827505131218156285512224809394712341451702237358057727861600868838295230459264
 901-1000: 7878017889921990270776903895321968198615143780314997411069260886742962267575605231727775203536139362

Gesetzmäßigkeiten für Fibonacci-Zahlen

Index n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibonacci Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}

- $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + \dots + F_u = F_{u+1}$
- $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} + \dots + F_g = F_{g+1} - 1$
- $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ (goldenes Rechteck)
- Ist der Index n durch 5 teilbar, so ist auch die Fibonacci-Zahl F_n durch 5 teilbar.
- Ist die Fibonacci-Zahl F_n eine Primzahl ($n > 3$), so ist auch der Index n eine Primzahl.
- Das Gegenteil gilt nicht, da $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$
- Ist m ein Vielfaches von n, so ist auch F_m ein Vielfaches von F_n
- $F_{2n} = (F_{n-1} + F_{n+1}) \cdot F_n$
- $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ - rekursive Formel (Fibonacci, 1202 auch frühere)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ - Formel von Binet'(1843)

Fibonacci Zahlen im Pascal'schen Dreieck

Bildungsregel des Pascalschen Dreiecks:
grafischen Darstellung der Binomialkoeffizienten (vgl. auch
Binomische Formeln...

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass jeder Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist.

```
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:PascalTriangleAnimated2.gif
--gif einbinden
```

Erklärung

<http://www.mathematische-basteleien.de/pascaldreieck.htm>

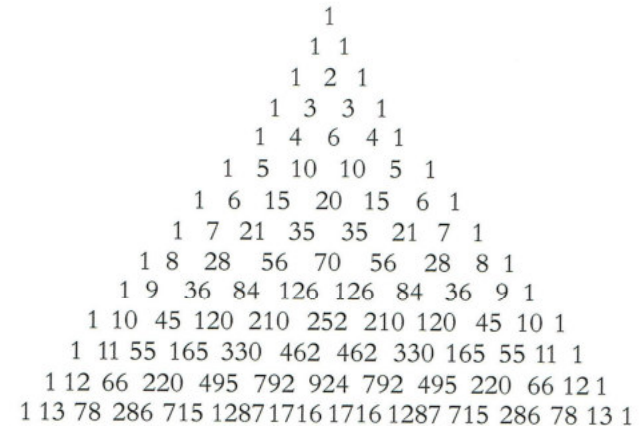
z.B. in



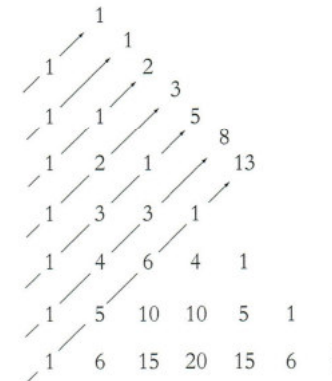
Pascals Dreieck und Fibonacci's Zahlenfolge

Das Pascalsche Dreieck entspricht einer der berühmtesten Zahlenregeln. Für Pascal war es ein Schritt auf dem Weg zur Entdeckung des Binomischen Lehrsatzes, der jedoch bereits den alten Chinesen sowie dem persischen Mathematiker Omar Khayyám, der im 12. Jahrhundert lebte, bekannt war.

Das Pascalsche Dreieck setzt sich folgendermaßen zusammen: Die erste Reihe (die sogenannte Null-Reihe) besteht aus der 1. Jede folgende Reihe umfasst eine Zahl mehr, als sich in der darüberliegenden Reihe befinden, wobei sich jede neue Zahl als Summe der beiden links und rechts außen darüberliegenden Zahlen ergibt (wenn sich links oder rechts keine Zahl befindet, wird die 0 verwendet). Diese Definition unterstreicht die Verbindung des Dreiecks zur Fibonacci-Folge, deren Beschreibung ähnlich klingt. Bei derart verwandten Definitionen müsste man eine direkte zahlenmäßige Verbindung zwischen Pascals und Fibonaccis mathematischen

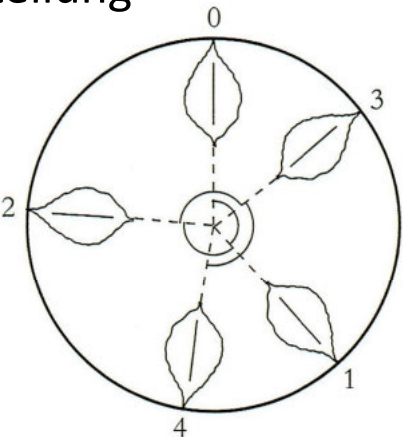


Konstruktionen erwarten. Und das ist auch tatsächlich der Fall: Wenn wir die Zahlen jeder Reihe des Pascalschen Dreiecks direkt untereinander schreiben und sie dann diagonal addieren (siehe Abbildung unten), entsteht die Fibonacci-Folge (1, 1, 2, 3, 5, 8 etc.).

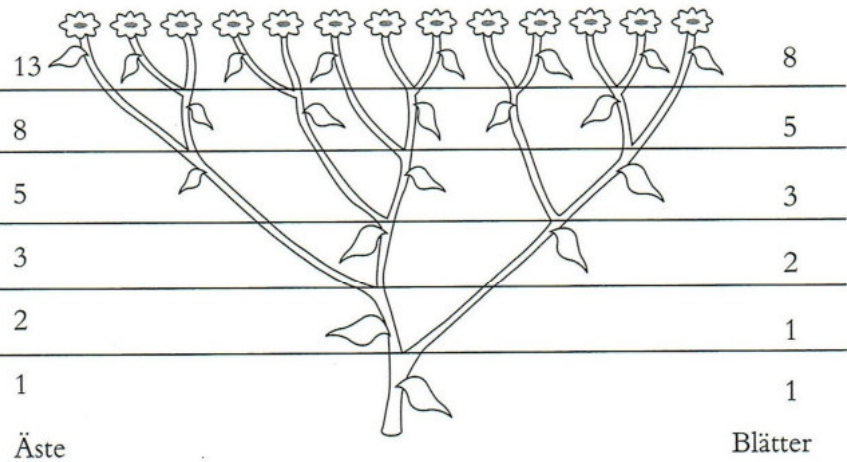


Die Fibonacci Zahlen in der Natur

Blütenblätter Anzahl Spiralen Blattstellung



Jedes aufeinanderfolgende Blatt am Stängel einer Sonnenblume entspringt in einem Abstand von ca. 137,5° vom vorhergehenden.



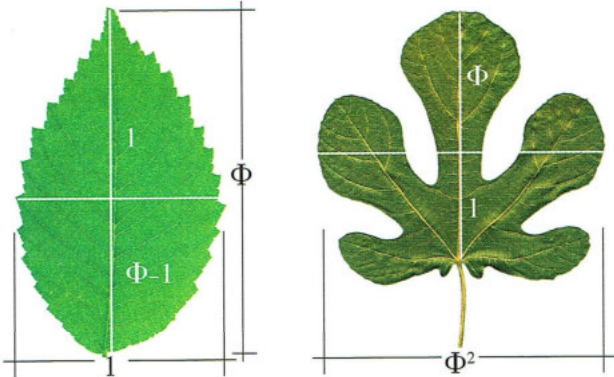
Nießkraut oder Sumpf-Schafgarbe (*Achillea ptarmica*) ist eine der vielen Pflanzen, deren Zweige und Blätter gemäß der Fibonacci-Folge angeordnet sind.

Blüten und Blütenblätter

Die Anzahl der Blütenblätter stimmt bei vielen Blumen ebenfalls oft mit Zahlen der Fibonacci-Folge überein, dazu gehören z.B. Flieder (3 Blütenblätter), Hahnenfuß (5), Rittersporn (8), Ringelblume (13) oder Aster (21). Unterschiedliche Margeriten- oder Gänseblümchenarten haben auch eine unterschiedliche Anzahl von Blütenblättern (z.B. 21, 34, 55, 89), die jedoch immer Fibonacci-Zahlen sind. Oft zupfen Verliebte an den Blütenblättern einer Margerite oder eines Gänseblümchens und fragen sich dabei: „Er (oder sie) liebt mich, ... liebt mich nicht ...etc.“? Man könnte nun meinen, ein verliebter Mathematiker hätte vielleicht einen Vorteil bei der Befragung dieses „Gänseblümchen“-Orakels. Aber das ist nicht der Fall. Glücklicherweise lassen die Natur und die Fibonacci-Folge dem Zufall doch noch eine Chance und das Blümchen birgt weiterhin sein Geheimnis. Obwohl die Zahl der Blütenblätter eine Fibonacci-Zahl ist, umfasst die Folge gerade und ungerade Zahlen, und wir wissen erst, wie viele Blütenblätter unsere Blume besitzt, wenn wir sie ausrupfen. Für Romantiker gibt es also keine sichere Antwort. Wie im Falle der Architektur erscheint uns der Goldene Schnitt auch bei den Pflanzen manchmal zu geordnet, um natürlich zu sein. Eine genaue Erforschung dieses Gebiets stillt jedoch nicht nur unseren Wissensdurst, sondern befriedigt auch unseren Sinn für Ästhetik.



Die Anzahl der Blütenblätter bei einer Margerite oder einem Gänseblümchen entspricht immer einer Fibonacci-Zahl, in diesem Fall 21.



Die Einteilung der Blätter von Bergulme (*Ulmus glabra*) und Echtem Feigenbaum (*Ficus carica*) entsprechen ihrer Beziehung zum Goldenen Schnitt.

Die Fibonacci-Zahlen – Ruhm und Realität

	Fibonacci		Lucas		Zahlenland-Tagung	
Stelle	Zahl	Quotient	Zahl	Quotient	Zahl	Quotient
1	1		2		452018	
2	1	1	1	0,5	652018	1,442460256
3	2	2	3	3	1104036	1,693260002
4	3	1,5	4	1,333333333	1756054	1,590576757
5	5	1,666666667	7	1,75	2860090	1,628702762
6	8	1,666666667	11	1,571428571	4616144	1,613985574
7	13	1,666666667	18	1,636363636	7476234	1,619584224
8	21	1,666666667	29	1,611111111	12092378	1,617442418
9	34	1,666666667	47	1,620689655	19568612	1,618260031
10	55	1,666666667	76	1,617021277	31660990	1,61794766
11	89	1,666666667	123	1,618421053	51229602	1,618066965
12	144	1,666666667	199	1,617886179	82890592	1,618021393
13	233	1,666666667	322	1,618090452	134120194	1,6180388
14	377	1,666666667	521	1,618012422	217010786	1,618032151
15	610	1,666666667	843	1,618042226	351130980	1,618034691
16	987	1,666666667	1364	1,618030842	568141766	1,618033721
17	1597	1,666666667	2207	1,618035191	919272746	1,618034091
18	2584	1,666666667	3571	1,61803353	1487414512	1,61803395
19	4181	1,666666667	5778	1,618034164	2406687258	1,618034004
20	6765	1,666666667	9349	1,618033922	3894101770	1,618033983

Die ersten 100 Nachkommastellen des goldenen Schnitts:

1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374

Die Fibonacci-Zahlen – Ruhm und Realität



Planungspoker

Scrum schreibt keine spezifische Methode vor, Aufwände abzuschätzen. Bei einer guten Schätzmethode sollten die Beteiligten zunächst unbeeinflusst von den anderen Teilnehmern schätzen. Andererseits sollte die Methode in annehmbarer Zeit zu einem akzeptierten und validen Ergebnis führen. Seit ca. 2005 ist Planungspoker eine gängige Methode in Scrum und generell in agilen Projekten. Die englische Bezeichnung *Planning Poker* ist eine geschützte Warenbezeichnung der Firma Mountain Goat Software. Jeder Teilnehmer erhält einen Satz Spielkarten. Diese sind mit Schwierigkeitsgraden oder Story Points bedruckt, beispielsweise in der Systematik:

- trivial – einfach – mittel – schwierig – sehr schwierig – extrem schwierig
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Diese Fibonacci-Zahlenfolge wird häufig gewählt, um der zunehmenden Unsicherheit in der Schätzung schwererer Aufgaben gerecht zu werden. Nebestehendes Foto von Planungspoker-Karten zeigt, dass die Werte teils gerundet wurden.

Fibonacci-Trading

Als **Fibonacci-Retracements** bezeichnet man in der technischen Analyse (Chartanalyse) Kurskorrekturen von z.B. Aktienpreisen an Widerstands- und Unterstützungslinien. Hoch- und Tiefpreise werden mit Linien verbunden. Zu diesen werden die Parallelen bei 61,8% und 38,2% (also dem Goldenen Schnitt) gezeichnet. Es wird die Kursentwicklung aufgrund des Verhaltens der Preise an diesen Linien prognostiziert, um Handelsgewinne zu erzielen. Außerdem wird das Bild der Aktiencharts an den Tagen, die von einem Ausgangspunkt im Abstand der Fibonacci-Folge liegen, besonders beobachtet. Benannt sind sie nach der zugrunde gelegten Fibonacci-Folge. Die statistisch nicht nachweisbaren Fibonacci-Retracements basieren auf der Idee, dass Märkte vorangegangene Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegungen vorhersehbar um bestimmte Prozentsätze korrigieren.



Musikalische Zahlen
Eine Oktave auf einer Klaviatur besteht aus 13 Tasten: acht weißen und fünf schwarzen. Sie sind in Gruppen zu je drei und zwei Tasten angeordnet. All das sind Fibonacci-Zahlen. Erstaunlich, oder?

weitere: Stammbaum männlicher Bienen, Fettsäuren
Geheimcode in Dan Browns Roman Skrileg
Typographie: Harmonisches Schriftbild mit Fibonacci- und Lucas-Zahlen

weitere interessante mathematische Phänomene für das nächste Jahrestreffen
(ggf. wählen...)

Goldener Schnitt



Fibonacci hat die indoarabischen Ziffern nach Europa gebracht
(Rechnen mit Römischen Ziffern, Rechenbrett Adam Riese,
Die Geschichte der Null)

Zusammenhang Fibonacci Zahlen Napier-Rechenstäbchen



Die Illustration aus Gregor Reischs allgemeiner Enzyklopädie Margarita Philosophica von 1504 symbolisiert den Disput zwischen den Abakus-Anhängern (rechts) und den Algorithmikern (links). Die Abbildung zeigt, dass der Streit über die Rechensysteme selbst drei Jahrhunderte nach Fibonacci noch nicht beendet war.

32

Pythagoreische Tripel (Ägyptische Knotenschnur)



Pascalsches Dreieck
Primzahlen